EXTREMWERTAUFGABEN 1

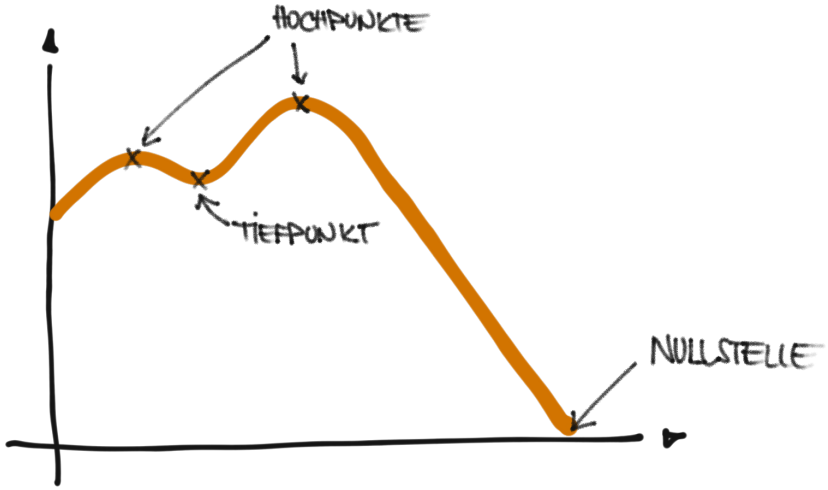
Beim Erlernen von Grundlagen ist es immer schwierig, Anwendungsgebiete zu entdecken, die auf den ersten Blick sinnvoll erscheinen. Oft ist das bei der Mathematik der Fall. Verständliche Theorie, aber an den Haaren herbeigezogene Beispiele. Bei den Extremwertaufgaben ist das ein wenig anders.

Extremwerte als aufschlussreiche Punkte von Funktionen

Wozu verwendet man Funktionen? Für die Modellbildung - dem Nachbauen oder Voraussagen von Zusammenhängen mit Hilfe mathematischer Schreibweise und ihren damit bewiesenen Rechenregeln.

Sind Zusammenhänge in Funktionen ausgedrückt, ist es in der Folge von Interesse, besonderes Verhalten der Funktion (und damit Aussagen über den eigentlichen Zusammenhang) zu ermitteln.

Was versteht man nun unter „besonderem Verhalten“?

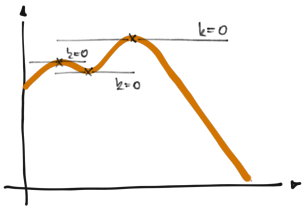


Egal, um welche Zusammenhänge es sich handelt, neben der schon bekannten Nullstelle sind jedenfalls noch jene Stellen von Interesse, an denen die Funktion besonders hohe bzw. besonders niedrige Werte annimmt. Wo können solche Stellen von Interesse sein?

- Funktionen, die den Gewinn von Betrieben beschreiben
- Funktionen, die Infektionszahlen beschreiben
- Funktionen, die Abgaswerte beschreiben
- u.v.m.

Also - Der Auftrag ist klar.

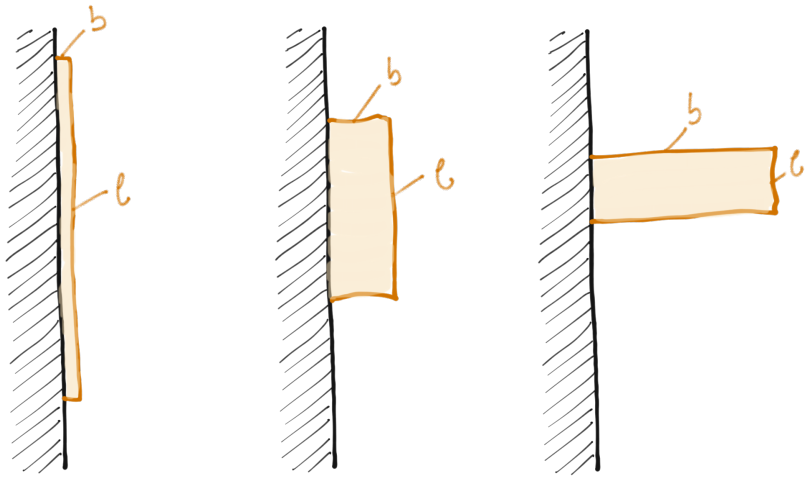
Wann wird ein Wert eines Zusammenhanges besonders hoch oder besonders niedrig? Wie gehst du vor…



1. Finde heraus, wie die Funktion überhaupt definiert ist.
   Ermittle $f(x) = \ldots ?$

2. Suche Stellen (= x - Werte), an denen die Funktion die Steigung Null hat. Dort befinden sich die besonders hohen bzw. besonders niedrigen Stellen.

B1. Umzäune mit 20m Zaun eine möglichst große Grundfläche. An einer Seite hast du eine sehre lange Wand als Begrenzung zur Verfügung.



1. Die umzäunte Fläche soll möglichst groß sein. Man berechnet sie mit:

$$A = l \cdot b$$

2a. l **und** b **hängen aber zusammen. Es sind nur 20 m Zaun da.**

$$l + 2 \cdot b = 20$$

2b. Also gilt

$$l = 20 - 2b$$

3. Das wird in die Fläche eingesetzt

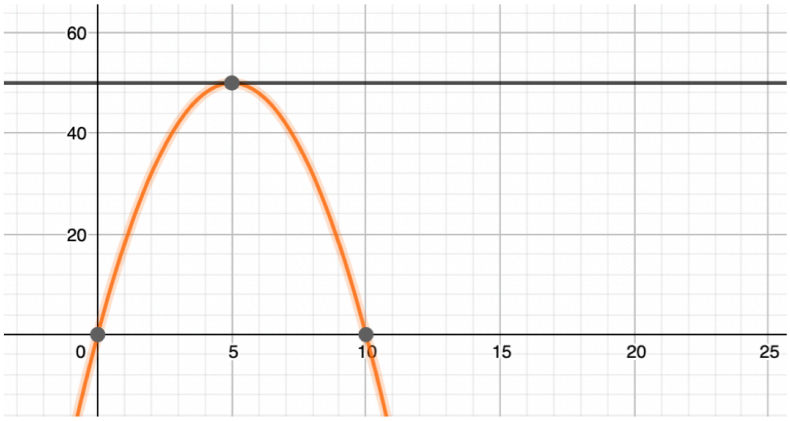
$$A = l \cdot b$$
$$A(b) = (20 - 2b) \cdot b$$

PASS AUF

Sucht man bei einer Funktion die höchsten bzw. tiefsten Punkte, so reicht es, die Stellen zu berechnen, an denen die Funktion eine horizontale Tangente besitzt. Es muss also gelten:

$$f'(x) = 0$$

4. Wie sieht diese Funktion aus?



4. Der höchste Punkt scheint bei x=5 zu liegen. Wir berechnen ihn sicherheitshalber.

- **Ableitung berechnen**
- **ermitteln, wo diese Ableitung gleich Null ist.**

$$A(b) = (20 - 2b) \cdot b$$
$$A(b) = 20b - 2b^2$$

$$A'(b) = 20 - 4b$$

$$0 = 20 - 4b$$
$$4b = 20$$
$$b = 5$$

Im Punkt b=5 besitzt die beschriebenen Funktion A(b) eine horizontale Tangente. Dort ist der Funktionswert also am höchsten.

Für die Breite b=5 m ergibt sich für das eingefasste Flächenstück die größte mögliche Fläche!

Die Fragestellung, ob es sich bei den gefundenen Stellen um extrem hohe oder extrem niedrige Stellen handelt (beides könnte sein, wenn die Tangenten horizontal sind) ist gar nicht so einfach. Hier einige Angebote:

- Zeichne einen Graphen mit Hilfe von GeoGebra
- Ermittle Werte knapp neben dem gefundenen Wert (und zwar vorher UND nachher)
- Überlege. Die Steigung war doch gerade gleich Null. War sie kurz vorher positiv oder negativ? Ist sie also gerade gesunken oder gestiegen.
  Neue Frage also: Steigt die Steigung am Extremwert oder sinkt die

Steigung?
Berechne die Änderung der Steigung und schau, ob diese steigt (also positiv ist) oder sinkt (also negativ ist).

> **5. Wir berechnen, ob es sich bei A(5) um eine Maximum oder eine Minimum handelt.**
>
> - Graph zeigt: Punkt ist ein Maximum
> - A(4) = (20-2*4)*4=48
>   A(6) = (20-2*6)*6=48
>   Links und rechts des Extremwertes sind die Werte kleiner als am Extremwert. Dieser ist also ein Maximum
> - $A''(b) = -4$
>   Die Steigung fällt also. Während sie vor dem Extremwert noch positiv war, am Extremwert Null und nach dem Extremwert negativ, ergibt sich, dass es sich um ein Maximum handeln muss.

Zusammenfassung
Alle Extremwertaufgaben werden auf diese Art und Weise gelöst. Ich versuche zusammenzufassen:

1. Welcher Wert soll möglichst groß bzw. möglichst klein werden. Wie wird er berechnet?
   Diesen Zusammenhang nennt man HAUPTBEDINGUNG.
   Oft beinhaltet diese noch mehrere Variable, die aber zusammenhängen.
   Fläche = Länge x Breite

2. Der Zusammenhang der vorkommenden Variablen lässt sich ebenfalls aus der Angabe ableiten. Letztlich lässt sich eine Variable durch die andere ausdrücken.
   Diesen Zusammenhang nennt man NEBENBEDINGUNG
   Länge + 2 x Breite = 20 m

3. Diese Variable wird in die HAUPTBEDINGUNG eingesetzt. Man erhält eine Funktion, die von einer Variablen abhängig ist.

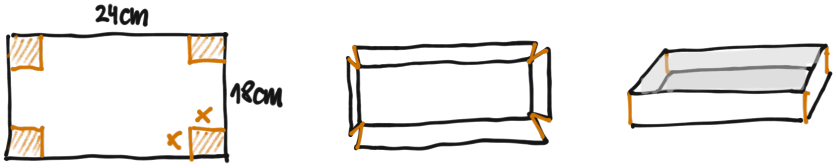
4. Berechne die **Ableitung der HAUPTBEDINGUNG** und setze diese gleich Null. Die resultierende Stelle ist ein Extremwert.

5. Berechne die **Ableitung der Ableitung der HAUPTBEDINGUNG** und ermittle, wie groß diese am Extremwert ist. Ist sie,

   - negativ 🙁, dann handelt es sich um ein Maximum, ist sie
   - positiv 🙂, dann handelt es sich um ein Minimum.

Jetzt du:

B2. Aus einem Kartonrechteck (Länge $l = 24$ und Breite $b = 18$ - Angaben in Zentimeter) werden vier Quadrate herausgeschnitten (x cm), sodass man eine Schachtel falten kann.



Wie groß müssen diese Quadrate (wie groß muss x) sein, damit der Volumsinhalt der Schachtel möglichst groß wird.