GLEICHUNGEN UND POLYNOMFUNKTIONEN 2

Polynom vom Grad n - (algebraische) Gleichung vom Grad n Quadratische Gleichungen / Produkt-Null-Satz / Abspalten von Lösungen / Anzahl von Lösungen

Gleichungen - Polynomfunktionen: Wie war das?

Es stellt sich heraus, dass die Behandlung von algebraischen

Was man aus diesen Infos macht

Die bisherige Informationssammlung in diesem Kapitel scheint noch nicht atemberaubend.

Was ist, wenn man das Pferd aber von hinten aufzäumt? Ich versuche, die Abfolge umzudrehen:

Du hast eine beliebige algebraische Gleichung vom Grad 3	$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$
Eine Lösung fällt dir auf. Warum? Egal. $x = 1$	$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 \overset{!!!}{=} 0$
Dann könnte ja das Polynom als Produkt darstellbar sein. Einen Faktor kennt man schon!	$(x - 1) \cdot \text{Wert} = x^3 + 3^2 - x - 3$
Wenn das so ist, dann könnte man das Polynom durch den erstbesten Lösungsfaktor dividieren!	$\text{Wert} = \dfrac{x^3 + 3^2 - x - 3}{x - 1}$

PASS AUF

Ein Faktor dieser Form $(x - 1)$

bestehend aus einem Vielfachen von x und einer Konstante

heißt **Linearfaktor.**

Division per Hand

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x - 1) = x^2 + 4x + 3 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad 4x^2 - x \\
\quad \underline{4x^2 - 4x} \\
\qquad 3x - 3 \\
\qquad \underline{3x - 3} \\
\qquad\quad 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Division mit GeoGebra

$l1 = \text{Division}(x^3 + 3x^2 - x - 3, x - 1)$

$\rightarrow \{x^2 + 4x + 3, 0\}$

Gut, dann stellen sich einige Fragen.

Was bringt das?

Wenn dieses Polynom vom Grad 3 nun aus zwei Faktoren besteht, und einer davon noch vom Grad 2 ist, dann könnte es sein, dass auch dieser sich noch zerlegen lässt. Das geht mit Hilfe der kleinen Lösungsformel. Man erhält die beiden Lösungen:

Lösung per Hand

$$x^2+4x+3=0$$
$$x_{2|3} = -2 \pm \sqrt{4-3}$$
$$= -2 \pm 1$$
$$\underline{x_2 = -1} \qquad \underline{x_3 = -3}$$

Lösung mit GeoGebra

$$l2 = \text{Löse}(x^2+4x+3)$$
$$\rightarrow \{x = -3, x = -1\}$$

Die Gleichung hat also insgesamt drei Lösungen.

Kann man das mit jedem Polynom machen?

Im Prinzip ja. Was brauchst du dazu?

- Lösungen des Polynoms
- Geduld und zuletzt ev. die kleine Lösungsformel

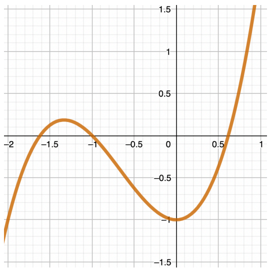
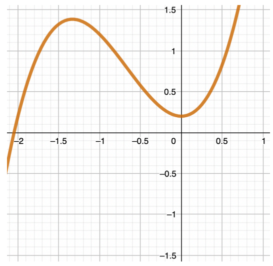
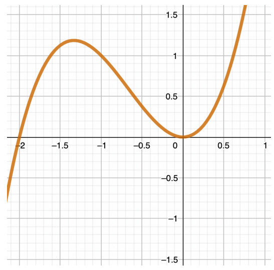
$$\boxed{\text{POLYNOM } n} : (x - Lsg_1) = \boxed{\text{POLYNOM } n-1}$$
$$\boxed{\text{POLYNOM } n-1} : (x - Lsg_2) = \boxed{\text{POLYNOM } n-2}$$
$$\boxed{\text{POLYNOM } n-2} : (x - Lsg_3) = \boxed{\text{POLYNOM } n-3}$$
$$\boxed{\text{POLYNOM } n-3} : (x - Lsg_4) = \boxed{\text{POLYNOM } n-4}$$

...

Lässt sich jedes Polynom in kleine (= Linear-)faktoren zerlegen?

Im besten Fall ja, im allgemeinen aber leider nein. Oft bleiben quadratische Terme übrig, die keine Lösungen (innerhalb der reellen Zahlen) besitzen.

Wie kann man sich das vorstellen?

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$	$f(x) = x^3 + 2x^2 + 0.2$	$f(x) = x^3 + 2x^2$
Die Funktion hat drei Nullstellen.	Die Funktion hat eine Nullstelle.	Die Funktion hat zwei Nullstellen. Eine davon (diejenige, die die x-Achse berührt) zählt „doppelt“.
Das Polynom hat drei Lösungen (in ℝ). Lösung A, Lösung B, Lösung C	Das Polynom hat eine Lösung (in ℝ). Lösung A.	Das Polynom hat zwei unterschiedliche Lösungen. Lösung A, Lösung B.
Das Polynom lässt sich in drei Linearfaktoren zerlegen.	Das Polynom lässt sich in einen Linearfaktor und einen quadratischen Faktor zerlegen. Der quadratische Faktor ist nicht mehr faktorisierbar.	Das Polynom lässt sich in drei Linearfaktoren zerlegen. Einer davon kommt doppelt vor.
$(x-A)(x-B)(x-C)$	$(x-A)\left(x^2+px+q\right)$	$(x-A)(x-B)(x-B)$ $=(x-A)(x-B)^2$

Was muss man sich jetzt davon merken?

Lösungen Algebraischer Gleichungen sind Nullstellen von Polynomfunktion?

Wenn man das Aussehen der Polynomfunktionen im Kopf hat, dann sind die Lösungsmöglichkeiten von Algebraischen Gleichungen leicht vorstellbar.

Ein Polynom kann faktorisiert werden?

Ein Polynom vom Grad n kann in höchstens n unterschiedliche Faktoren zerlegt werden. Es kann aber sein, dass quadratische Faktoren nicht mehr weiter zerlegt werden können. Dann reduziert sich die Anzahl der Lösungen (bzw. Nullstellen).

Linearfakoren sind Lösungen?

Jede Lösung einer algebraischen Gleichung entspricht einem Linearfaktor der Faktorisierung des Polynoms. Ein quadratsicher Faktor kann entweder weiter zerlegt werden (zwei weitere Lösungen), manchmal aber auch nicht.

Gibt es Algebraische Gleichungen ohne Lösungen?
Gibt es Polynome, die man nicht in Linearfaktoren zerlegen kann?

Nur solche mit geradem Grad. Der Funktionsgraph einer Polynomfunktion mit ungeradem Grad schneidet immer zumindest einmal die x-Achse. Ein Polynom mit geradem Grad könnte in ausschließlich quadratische Faktoren zerlegbar sein, die nicht weiter faktorisiert werden können.

Wie viele Nullstellen hat ein Polynom vom Grad n

n gerade … Die Anzahl der Nullstellen liegt zwischen 0 und n.
n ungerade … Die Anahl der Nullstellen liegt zwischen 1 und n.