GLEICHUNGEN UND POLYNOMFUNKTIONEN 1

Polynom vom Grad n - (algebraische) Gleichung vom Grad n Quadratische Gleichungen / Produkt-Null-Satz / Abspalten von Lösungen / Anzahl von Lösungen

Zwei Themen in einem Kapitel?

Je länger man sich mit der Mathematik beschäftigt, desto häufiger trifft man auf Verwandtschaften von Themengebieten, mit denen man - anfangs auf den ersten Blick, später auch auf den dritten und vierten - nicht gerechnet hat.

Nicht völlig aus dem Untergrund, vielleicht für manche sogar ein wenig befreiend kommt da der Zusammenhang zwischen Gleichung und Funktion.

Vielleicht ist es dir sogar schon einmal schwer gefallen, den Begriff der Funktion sauber von dem der Formel oder der Gleichung zu trennen. Hier ein wenig Licht ins Dunkel.

Definition
Ein Ausdruck der Form

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0$$

heißt **Polynom vom Grad n**.

Natürlich muss gelten: $n \in \mathbb{N}$ und auch $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Zuletzt muss $a_n \neq 0$ sein. Sonst fällt ja der erste Summand weg, und das Polynom ist nicht mehr vom Grad n. Alle anderen Koeffizienten können auch Null sein, das ist dann egal.

Beispiele für Polynome vom Grad n

$2x + 1$ … Polynom vom Grad 1

$x^3 - 2x$ … Polynom vom Grad 3

$\dfrac{x^6}{6} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}$ … Polynom vom Grad 6

Bekanntermaßen sind das die Funktionsterme der so genannten **Polynomfunktionen.**

Definition
Eine Funktion der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0$

heißt **Polynomfunktion vom Grad n**.

Du weißt, es muss gelten: $n \in \mathbb{N}$ und auch $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Zuletzt ist wieder $a_n \neq 0$.

Beispiele für Polynomfunktionen vom Grad n

Die lineare Funktion ist eine Polynomfunktion vom Grad 1.
Die quadratische Funktion ist eine Polynomfunktion vom Grad 2.

usw.

Polynomfunktionen haben außergewöhnlich große Bedeutung in der Mathematik. Sie sind einerseits recht leicht handhabbar (auch für Rechenmaschinen = Computer) und beschreiben andererseits - wenn schon nicht exakt, dann in unzähligen Fällen näherungsweise - Zusammenhänge, die mathematisch ausgedrückt werden sollen.

Aber weiter gehts mit der dritten doch sehr ähnlichen Schreibweise, die auf die Polynome zurückführt.

Definition
Eine Gleichung der Form
$0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0$ oder öfter
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

heißt **(algebraische) Gleichung vom Grad n**.

Wiederum muss gelten: $n \in \mathbb{N}$ und auch $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Und ja: $a_n \neq 0$ sein.

Um es auf den Punkt zu bringen zwei Fragestellungen mit **einer Antwort.**

PASS AUF

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

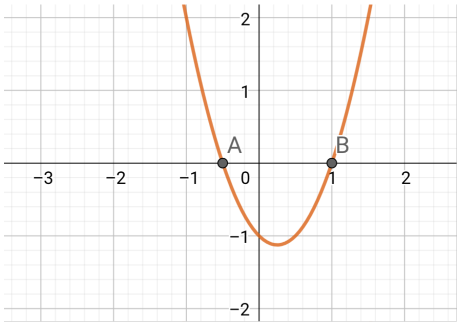
Lösungsformel für die quadratische Gleichung

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

B1. Gegeben ist das Polynom $2x^2 - x + 1$.

a) Berechne die **Nullstellen der Polynomfunktion**
$f(x) = 2x^2 - x - 1$

b) Finde alle **Lösungen der algebraische Gleichung**
$2x^2 - x - 1 = 0$



a) & b)

$2x^2 - x - 1 = 0$

$x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$x_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$

$= \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $x_2 = 1$

$A = (-\frac{1}{2}, 0)$ $\quad$ $B = (1, 0)$

Beide Fragestellungen werden also identisch berechnet.

Soll der Funktionswert der **Polynomfunktion**

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

gleich Null sein, so setzt man in die Funktionsdefinition ein und schreibt:

$0 = 2x^2 - x - 1$

Was hier steht ist exakt die **algebraische Gleichung.**

Trainiere noch einmal die Lösungsformel zur Lösung von algebraischen Gleichungen vom Grad 2:

B2. Ermittle die Nullstellen der Funktion $x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0$

Außer der kleinen Lösungsformel hast du vielleicht auch noch den **Produkt-Null-Satz** in Erinnerung.

Der Produkt-Null-Satz

Am schnellsten erklärt man den Produkt-Null-Satz mit folgendem Beispiel.

B3. Löse die Gleichung $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right) = 0.$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}x - \frac{5}{12}$$

$$= x^2 - \frac{3}{6}x + \frac{5}{6}x - \frac{5}{12}$$

$$= x^2 + \frac{2}{6}x - \frac{5}{12}$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{15}{36}} = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{16}{36}}$$

$$= -\frac{1}{6} \pm \frac{4}{6}$$

$$\underline{x_1 = -\frac{5}{6}} \qquad \underline{x_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

Die Lösungen der obigen Gleichung entstanden mühsam, am Ende wird man mit der Vorgangsweise nicht zufrieden sein. Schon in der Angabe stand ein Produkt, das Null gleichgesetzt wurde.

Satz

Eine Produkt $A \cdot B$ ist genau dann Null, wenn zumindest einer der beiden Faktoren A oder B gleich Null ist.

$$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$$

Genau diese (triviale) Aussage erhält den Namen **Produkt-Null-Satz.**

PASS AUF

Ein Faktor dieser Form $(x - 1)$

bestehend aus einem Vielfachen von x und einer Konstante

heißt **Linearfaktor.**

Um zum obigen Beispiel zurückzukehren:

B3. Löse die Gleichung $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right) = 0.$

$x - \frac{1}{2} = 0$ ODER $x + \frac{5}{6} = 0$

$\underline{x = \frac{1}{2}}$ $\underline{x = -\frac{5}{6}}$

Sind die Faktoren also so leicht ersichtlich, so können die Lösungen der Gleichung einfach abgeschrieben werden. Beachten musst du lediglich, dass sich die Vorzeichen der Summanden innerhalb der Klammern (durch die Umformung ersichtlich) umkehren.

B4. Ermittle ein Polynom vom Grad 3 mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$? Zeichne den zugehörigen Graphen.