FOLGEN 3 - DER GRENZWERT

Einleitung

Eine Besonderheit von Folgen ist die Eigenschaft, dass sie mit jedem Folgeglied einem bestimmten Wert immer näher kommen, diesen zwar nie ganz erreichen, ihn aber auch niemals überschreiten. Diese so genannten Grenzwerte sind zwar von der Anschauung her recht unkompliziert und verständlich, bergen aber mathematisch viele Stolpersteine in sich, über die man sich beim ersten Betrachten eigentlich keine Gedanken macht.

Zur Erläuterung - wie so oft - gleich zu Beginn drei Beispiele, die zeigen, was gemeint ist.

B1. Gegeben ist die Zahlenfolge a durch die Termdarstellung.
$a_n = 3n - 1$
Berechne das 10., 100., 100.000. Folgeglied und formuliere deine Einschätzung, wie sich die Folgeglieder mit wachsendem n weiter entwickeln werden.

$a_n = 3n - 1$

$a_{10} = 3 \cdot 10 - 1 = 29$

$a_{100} = 3 \cdot 100 - 1 = 299$

$a_{100.000} = 3 \cdot 100.000 - 1 = 299.999$

WÄCHST INS UNENDLICHE IMMER WEITER AN.

B2. Gegeben ist die Zahlenfolge a durch die Termdarstellung.

$a_n = cos((n-1) \cdot \pi)$

Berechne das 1., 2., 3.,100.000, 100.001., 100.002. Folgeglied und formuliere deine Einschätzung, wie sich die Folgeglieder mit wachsendem n weiter entwickeln werden.

$$a_n = \cos((n-1)\pi)$$
$$a_1 = \cos(0) = 1$$
$$a_2 = \cos(1 \cdot \pi) = 0$$
$$a_3 = \cos(2 \cdot \pi) = -1$$

$$a_{100.000} = \cos(100000\pi) = -1$$
$$a_{100.001} = \cos(100001\pi) = 0$$
$$a_{100.002} = \cos(100.002\pi) = 1$$

IMMER ABWECHSELND 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...

B3. Gegeben ist die Zahlenfolge a durch die Termdarstellung.

$a_n = \dfrac{2n}{3n-1}$

Berechne das 10., 100., 100.000. Folgeglied und formuliere deine Einschätzung, wie sich die Folgeglieder weiter entwickeln werden.

$$a_n = \frac{2n}{3n-1}$$
$$a_{10} = \frac{20}{29} = 0{,}689$$
$$a_{100} = \frac{200}{299} = 0{,}6689$$
$$a_{100.000} = \frac{200.000}{299.999} = 0{,}6666689$$

ANNÄHERUNG AN $0{,}\dot{6} = \frac{2}{3}$

Welches Beispiel von den drei einen so genannten **Grenzwert einer Folge** besitzt, muss nicht weiter erklärt werden.

Wie aber ist der Grenzwert mathematisch definiert?

Definition

Eine Zahl a heißt **Grenzwert** einer Folge, wenn zu jedem beliebig gewählten (meistens sehr kleinen) Abstand ε ein n (bzw. ein Folgeglied a_n ermitteln kann, ab dem dieser Abstand nicht mehr überschritten wird.

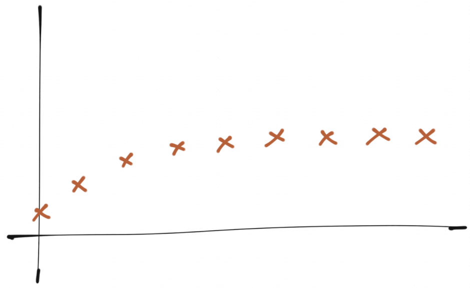
Der Grenzwert erhält die Bezeichnung **Limes** (lat. Grenze), und die zugehörige Abkürzung $a = \lim(a_n)$.

Bei der Berechnung eines Grenzwertes interessiert also nur, was **am Ende einer Folge** passiert.

Dazu führt man im Grund drei ganz einfache Schritte aus, die leicht zu illustrieren, allerdings ein wenig umständlicher zu berechnen sind.

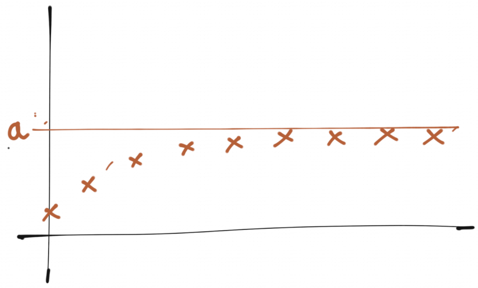
1. Die Folgeglieder

Zuerst benötigst du einen Term für die Folge. Mit der rekursiven Darstellung ist die Berechnung schwierig.



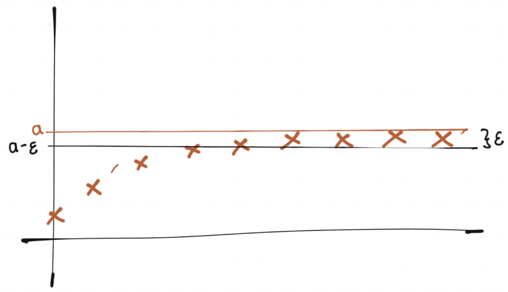
2. Der (vermutete) Grenzwert

Jetzt brauchst du eine Methode, um zu ermitteln, was der Grenzwert sein könnte.



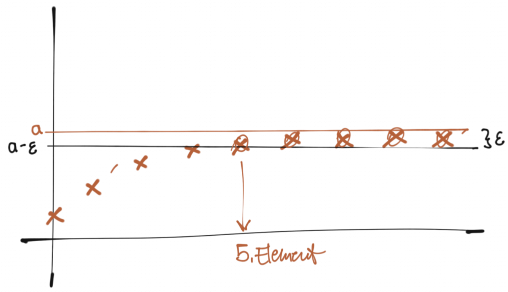
3. Die Epsilon-Umgebung

Jetzt suche dir einen kleinen Wert (mit einem großen Wert hat's wenig Sinn) für ε. Du kannst beliebig wählen. Es muss für jeden Wert funktionieren.



4. Das besondere Element

Gibt es nun für jedes beliebige von dir gewählte ε ein n, für das bei weiterem Anwachsen a_n die ε-Umgebung nicht mehr verlässt?



Wenn man dieses n (bzw. a_n findet, hat man bewiesen, dass es sich bei a tatsächlich um den Grenzwert handelt.

Das ist verständlich. Nun zur Rechnung. Nichts anderes, als hier in vier Schritten skizziert muss man durchführen, um einen Grenzwert zu beweisen.

1. Die Folgeglieder
2. Der (vermutete) Grenzwert
3. Die Epsilon-Umgebung
4. Das besondere Element

Genau diese vier Schritte sollen nun an Beispiel B3 durchgeführt werden.

1. Die Folgeglieder

Der Term der Folge ist in diesem Beispiel bereits gegeben. Er muss nicht erst aus der rekursiven Darstellung abgeleitet werden. Der Term lautet.

$$a_n = \frac{2n}{3n-1}$$

2. Der Grenzwert

Mit dem Einsetzen von großen Zahlen haben wir oben vermutet, dass der Grenzwert bei $a = \frac{2}{3}$ liegt.

Es gibt übrigens eine Methode, wie man vermutete Grenzwerte von Folgen ganz schnell berechnen kann. Diese Methode wird am Schluss noch vorgezeigt.

3. Die Epsilon-Umgebung

Wir sollen für unterschiedlichste ε-Werte den vierten Schritt durchführen. Das ist letztlich doch mühsam. Wir lassen ε einfach ε sein. Wir werden sehen, ob uns das weiter hilft.

Wir schreiben: Sei ε eine kleine reelle Zahl.

4. Das besondere Element

Nun machen wir uns auf die Suche, die Mathematik beginnt.

$a_n = \frac{2n}{3n-1} \qquad a = \frac{2}{3}$

$\left| \frac{2n}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$

BETRAG WEGLASSEN (GROßE n)

$\frac{2n}{3n-1} - \frac{2}{3} > 0$ GROßES n $\rightarrow$ $\frac{2000}{2999} - \frac{2}{3} > 0$ ✓

(1) $\frac{2n}{3n-1} - \frac{2}{3} < \varepsilon$

$\frac{2n \cdot 3}{(3n-1) \cdot 3} - \frac{2 \cdot (3n-1)}{3 \cdot (3n-1)} < \varepsilon \qquad HN = 3 \cdot (3n-1)$

$\frac{6n}{HN} - \frac{6n-2}{HN} < \varepsilon$

$\frac{2}{9n-3} < \varepsilon \quad \Big| : \varepsilon \quad \Big| \cdot (9n-3)$ GROßES n $\rightarrow 9000 - 3 > 0$

(2) $\frac{2}{\varepsilon} < 9n - 3 \quad \Big| +3$

$\frac{2}{\varepsilon} + 3 < 9n \quad \Big| : 9$

$\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\varepsilon} + 3\right) < n \qquad\qquad n > \frac{1}{9}\left(\frac{2}{\varepsilon} + 3\right)$

Für jedes beliebige kleine Epsilon kann man daraus jetzt also ein besonderes Element berechnen. Wähle z.B. $\varepsilon = 0.0001$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{2}{0.0001} + 3\right)$$

$$\approx 2222.5555555556$$

Das gesuchte n ist gefunden, es liegt bei 2223.

B4. Beweise, dass der Grenzwert der Folge $a_n = \dfrac{1}{n}$ bei $a = 0$ liegt.

Wenn der Grenzwert bewiesen ist, so kann man eine mathematische Schreibweise anwenden, um diesen anzuschreiben.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

Lies: Der Limes von n gegen Unendlich von Eins-durch-n ist Null.

Schnell den Grenzwert finden

Den Schätzwert für den Grenzwert aus der expliziten Formel ermitteln, auch dazu gibt es einen Trick, der soll hier noch vorgezeigt werden.

B5. Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n}{3n-1}$ bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} = \dfrac{n^2 - n}{2n^2 + 1}$ indem du Zähler und Nenner durch die höchste vorkommende Potenz dividierst.

$$\frac{2n \; \leftarrow :n}{3n-1 \; \leftarrow :n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{3n}{n} - \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3 - \frac{1}{n}} \right) = \frac{2}{3-0} = \frac{2}{3}$$

WIRD NULL

$$\frac{n^2 - n \; \leftarrow :n^2}{2n^2 + 1 \; \leftarrow :n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$