UNGLEICHUNGEN 4

Lineare Ungleichungen in zwei Variablen

Eine völlig andere Art des Lösens von Ungleichungen stellt die Herausforderung dar, Ungleichungen der Form

$$a \cdot x + b \cdot y < c \qquad (a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a, b \neq 0)$$

zu lösen.

Diese Ungleichung besitzt zwei Variable x und y, und je nach Kombination dieser beiden, kann (abhängig der Koeffizienten a, b und c) eine **wahre Aussage** bzw. eine **falsche Aussage** daraus resultieren.

Die Lösungsmenge besteht also aus Wertepaaren

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

B1. Gegeben ist die Ungleichung $2x - y \leq 1$.
Gib an, ob für die folgenden Wertepaare (x, y) die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt.
a) $(3,1)$ **b)** $(1,1)$ **c)** $(-1,-1)$ **d)** $(10,100)$

$2x - y \leq 1$

a) $2 \cdot 3 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 6 - 1 \leq 1$ F.A.

b) $2 \cdot 1 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq 1$ W.A.

c) $2 \cdot (-1) - (-1) \leq 1 \Leftrightarrow -2 + 1 \leq 1$ W.A.

d) $2 \cdot 10 - 100 \leq 1 \Leftrightarrow 20 - 100 \leq 1$ W.A.

B2. Gegeben ist die Ungleichung $-2x + \frac{y}{2} > 0$.

Gib an, ob für die folgenden Wertepaare (x, y) die Ungleichung eine wahre Aussage ergibt.

a) $(0, -2)$ **b)** $(3,4)$ **c)** $(-2,6)$ **d)** $(100,1000)$

Mit Probieren scheint diese Aufgabe natürlich einfach lösbar, aber wie lässt sich jetzt allgemein formulieren, welche Werte für x und y tatsächlich zulässig sind?

Analyse der Grenzlinie zwischen wahrer und falscher Aussage

PASS AUF

Löse zuerst den Grenzfall, denke dir als Grenze anstatt der Ungleichung eine Gleichhung

Sehr einfach wird die Aufgabenstellung dann, wenn man sich anstatt des Ungleichheitszeichens eine Gleichheitszeichen denkt.

Aus $a \cdot x + b \cdot y < c$ wird $a \cdot x + b \cdot y = c$

bzw. umgeformt sofort eine Geradengleichung mit Steigung und Ordinatenabschnitt:

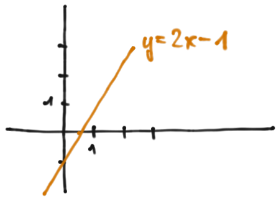
$$y = -\frac{a}{b}x + c$$

Natürlich ist die Gleichung auch ohne Umformung eine Geradengleichung. Auch diese Form kennst du bereits. Es ist die Normalvektorform der Gerade.

B3. Gegeben ist die Ungleichung $2x - y \leq 1$.
Gib die Grenzlinie an, für die die Aussage gerade noch wahr ist und stelle die Gerade graphisch dar.

$$2x - y \leq 1$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 && \vert -2x \\ -y &= 1 - 2x && \vert \cdot (-1) \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$



Die Ungleichung (mit den Variablenbezeichnungen x und y) wird also als Funktionsgleichung interpretiert und damit für dich leicht darstellbar.

Die Grenzlinie ist also die Gerade, die sich aus der Gleichung ergibt. Ob die Punkte, die auf dieser Grenzlinie liegen zur Lösungsmenge dazugehören oder nicht, hängt davon ab, ob es sich beim Ungleichheitszeichen um ein $\leq$ oder ein $\geq$ handelt (dann ist die Gerade Teil der Lösungsmenge) oder um $<$ oder $>$ (die Punkte der Gerade sind nicht Teil der Lösungsmenge).

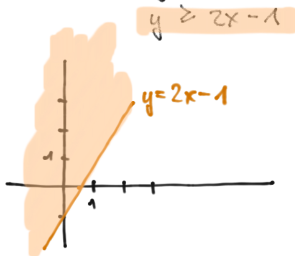
Interpretation als Ungleichung mit variablen y-Werten

Wende nun die Umformung zur Geraden in der Form $y = -\frac{a}{b}x + c$ für die Ungleichung an und versuche, die Lösungen zu interpretieren.

B4. Gegeben ist die Ungleichung $2x - y \leq 1$.
Forme die Ungleichung um auf $y \geq \ldots$ und stelle die Lösung graphisch dar.

$$2x - y \leq 1$$

$$\begin{aligned} 2x - y &\leq 1 && \vert -2x \\ -y &\leq 1 - 2x && \vert \cdot (-1) \\ y &\geq 2x - 1 \end{aligned}$$



B5. Gegeben sind drei unterschiedliche Ungleichungen.
Forme die Ungleichungen um auf $y \geq \dots$

a) $x - 4y \geq 3$ **b)** $2x + y < 0$ **c)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3y}{4} > -1$

Die Darstellung der Lösungsmenge im Koordinatensystem ist sehr übersichtlich.

Alle jenen Punkte, die beim Einsetzen in die Ungleichung eine wahre Aussage ergeben, werden schattiert dargestellt, die Grenze zu den Wertepaaren, die eine falsche Aussage ergeben, wird

- durchgehend gezeichnet, wenn die Punkte der Grenzgerade noch zur Lösungsmenge gehören ($\leq$ oder $\geq$)
- strichliert gezeichnet, wenn die Punkte der Grenzgerade nicht mehr zur Lösungsmenge gehören ($<$ oder $>$)

Unterstützung durch GeoGebra
Bei der graphischen Darstellung der Lösungen hilft GeoGebra in genau gewünschter Art und Weise mit, indem die Ungleichungen einfach in die CAS-Zeilen eingegeben werden. Die Halbebenen werden dann (inklusiver Strichlierung bzw. durchgezogener Grenzlinien) dargestellt.

B6. Gegeben sind drei unterschiedliche Ungleichungen.
Stelle die Lösungsmengen mit Hilfe von GeoGebra graphisch dar.

a) $x - 4y \geq 3$ **b)** $2x + y < 0$ **c)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3y}{4} > -1$