FOLGEN 2 - ARITHMETISCHE UND GEOMETRISCHE FOLGEN

Einleitung

Zwei spezielle, leicht handhabbare und oft auftretende Arten von Folgen sind die **Arithmetische Folge** und die **Geometrische Folge**.

Beide lassen sich sehr einfach explizit und auch rekursiv definieren und schnell an ihrer Form erkennen.

Am schnellsten lassen sich die Folgen durch Beispiele vorstellen.

B1. Gegeben ist die arithmetische Folge

$a_1 = 0$

$a_{n+1} = a_n + 5$

und die geometrische Folge

$g_1 = 1$

$g_{n+1} = g_n \cdot 5$

Finde zu diesen beiden rekursiven Darstellungen
a) die ersten vier Folgeglieder und
b) die expliziten Termdarstellungen

$a_1 = 0$

$a_{n+1} = a_n + 5$

$\{0, 5, 10, 15, \ldots\}$

$+5 \quad +5$

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 5 & 10 & 15 \end{array}$$

$a(n) = 5 \cdot (n-1)$

$g_1 = 1$

$g_{n+1} = g_n \cdot 5$

$\{1, 5, 25, 125, \ldots\}$

$\cdot 5 \quad \cdot 5$

$$\begin{array}{cccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{array}$$

$g(n) = 5^{n-1}$

Damit ist gut erklärt, wie die beiden Folgenarten definiert sind, mathematisch formuliert sieht das so aus:

Definition
Eine Zahlenfolge heißt **arithmetische Folge**, wenn die **Differenz d** zweier aufeinander folgender Folgeglieder konstant ist.

<u>Rekursive Darstellung</u>

a_1

$a_{n+1} = a_n + d$

<u>Explizite Darstellung</u>

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Definition
Eine Zahlenfolge heißt **geometrische Folge**, wenn der **Quotient q** zweier aufeinander folgender Folgeglieder konstant ist.

<u>Rekursive Darstellung</u>

g_1

$g_{n+1} = g_n \cdot q$

<u>Explizite Darstellung</u>

$a_n = a_0 \cdot q^{n-1}$

Um zu ermitteln, ob eine bestimmte Folge arithmetisch oder geometrisch ist, kann man mit Hilfe der Darstellungen die **Differenz d zweier Folgeglieder** bzw. den **Quotienten q zweier Folgeglieder** berechnen.

B2. Gegeben ist die Zahlenfolge a durch die Termdarstellung.
$a_n = 2n - 7$
Zeige, dass es sich um eine arithmetische Folge handelt, indem du die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgeglieder berechnest.

a)
$$a_n = 2n - 7$$
$$a_{n+1} = 2(n+1) - 7$$

$$\underbrace{a_{n+1} - a_n}_{\text{DIFFERENZ}} = 2(n+1) - 7 - (2n-7)$$
$$= \cancel{2n} + 2 \cancel{-7} - \cancel{2n} \cancel{+7}$$
$$= +2$$

→ DIE DIFFERENZ ZWEIER AUFEINANDER FOLGENDEN FOLGEGLIEDER IST KONSTANT, NÄMLICH $d = +2$

b) STARTWERT: $a_0 = 2 \cdot 0 - 7 = -7$
REKURSION: $a_{n+1} = a_n + 2$

B3. Bei günstigen Laborbedingungen können sich Bakterien im Labor so schnell vermehren, dass sich ihre Anzahl alle 20 Minuten verdoppelt.

Bei der ersten Beobachtung werden 6 Bakterien gezählt.

a) Wie sieht die explizite Darstellung der (geometrischen) Folge aus?
b) Wie groß ist q?
c) Wie lauten Startwert und Rekursionsformel?
d) Wie viele Bakterien sind es nach zwei Stunden?

B4. Berechne aus den Angaben die rekursive und die explizite Darstellung der Folgen

a) $a_1 = 1, d = 0.75$
b) Arithmetische Folge: $a_2 = 0, a_5 = -1.5$

a) $a_1 = 1$
$d = 0{,}75$

REK.
$a_1 = 1$
$a_{n+1} = a_n + 0{,}75$

EXP.
$a_n = 1 + (n-1) \cdot 0{,}75$

b) $a_2 = 0 \quad a_5 = -1{,}5$

ALLG. FORMEL $\quad a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

a_2: $\quad 0 = a_1 + (2-1) \cdot d = a_1 + d$

a_5: $\quad -1{,}5 = a_1 + (5-1) \cdot d = a_1 + 4d$

$a_5 - a_2$: $\quad -1{,}5 - 0 = (a_1 + 4d) - (a_1 + d)$

$-1{,}5 = 3d \quad |:3$

$d = -0{,}5$

in a_2: $\quad 0 = a_1 - 0{,}5$

$a_1 = 0{,}5$

$a_n = 0{,}5 + (n-1) \cdot (-0{,}5) =$
$= 0{,}5 - 0{,}5n + 0{,}5$

$\boxed{a_n = 1 - 0{,}5n}$

B5. Berechne aus den Angaben die rekursive und die explizite Darstellung der Folgen

a) $g_1 = \sqrt{3}, q = 0.75$

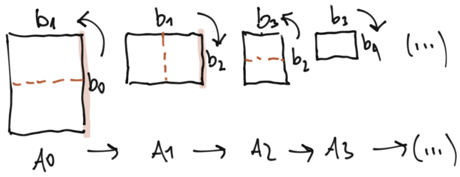
b) Geometrische Folge: $b_2 = 1, b_4 = \dfrac{1}{16}$

Komplexere Anwendung von Folgen

Folgen können zur Lösung von unterschiedlichsten Textaufgaben herangezogen werden.

B6. Die Vorschrift für DIN-Formate (DIN A4, usw.) lautet:

- *Je zwei benachbarte DIN-Formate einer Formatfolge gehen durch halbieren oder Verdoppeln auseinander hervor.*
- *Die Formate sind einander ähnlich.*
- *Das Ausgangsformat A0 hat* $1m^2$ *Grundfläche.*



$b_0 \cdot b_1 = 1\ (m^2)$

$b_1 = \frac{1}{b_0}$ *

1) $b_0 \to b_2 \ \dots \ b_0 \to \frac{b_0}{2}$ $\quad b_2 = \frac{b_0}{2}$

ALLGEMEIN $b_{n+2} = b_n \cdot \frac{1}{2}$

2) $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_{n+2}} \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n \cdot \frac{1}{2}}$

$b_n \cdot b_n \cdot \frac{1}{2} = b_{n+1} \cdot b_{n+1}$

$\frac{1}{2} b_n^2 = b_{n+1}^2$

$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_n$

3) STARTWERT

$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_0$

* $\frac{1}{b_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_0 \quad | \cdot b_0$

$\sqrt{2} = b_0^2$

$\sqrt[4]{2} = b_0$

PROBE: $b_0 \cdot b_1 \overset{?}{=} 1$

$\sqrt[4]{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2} = 1$ ✓

4) REK. $b_0 = \sqrt[4]{2}$

$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} b_n$