REELLE FUNKTIONEN 2

Term und Funktionsgleichung

Um eine Funktion mathematisch zu beschreiben, gibt es - abgesehen vom Funktionsgraphen und der Wertetabelle - zwei unterschiedliche Möglichkeiten.

Termdarstellung
Die Termdarstellung einer Funktion f gibt den Funktionswert $f(x)$ an jeder beliebigen Stelle $x \in \mathbb{D}$ an.

$$f(x) = 2x^3 + x - 1$$

B1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 1$. Berechne den Funktionwert an der Stelle $x = \frac{1}{2}$

$f(x) = x^2 - 1$

~~STELLE~~ $x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - 1$

$= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

Funktionsgleichung
Die Funktionsgleichung einer Funktion gibt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Lösungspunkte (=Wertepaare, Punkte des Graphen) an.

$$y = x^4 - 2x - 4$$

B2. Gegeben ist die Funktion $y = x + 1$. Liegt der Punkt $P = (-1 \mid 1)$ am Funktionsgraphen?

$y = x + 1$ $\quad P = (-1|1)$

$1 = -1 + 1$

$1 = 0$ $\lightning$ f.A.

Steigen, Fallen, Nullstellen, Minima, Maxima

Weiter gehts mit Begriffen, die im Zusammenhang mit der Beschreibung von Funktionen eine Rolle spielen.

Steigen – Ein Abschnitt einer Funktion wird als streng monoton steigend bezeichnet, wenn mit zunehmendem x auch die Funktionswerte $f(x)$ zunehmen. Im Graph erkennt man das Steigen einer Funktion am leichtesten, von links nach rechts „gelesen“ steigt die Funktionskurve (nach oben) an.

Fallen – Ein Abschnitt einer Funktion wird als streng monoton fallend bezeichnet, wenn mit zunehmendem x auch die Funktionswerte $f(x)$ abnehmen. Im Graph erkennt man das Fallen einer Funktion am leichtesten, von links nach rechts „gelesen“ fällt die Funktionskurve (nach unten) ab.

Maximum – Jene Stelle x einer Funktion, an der $f(x)$ am größten ist.

Minimum - Jene Stelle x einer Funktion, an der $f(x)$ am kleinsten ist.

Nullstelle – Jene Stelle x einer Funktion, an der $f(x) = 0$ ist, also der Graph die x-Achse schneidet.

B3. Die Abbildung zeigt einen Temperaturverlauf an einem Wintervormittag von 6 Uhr bis 12 Uhr. Die Funktion ordnet jeder Uhrzeit die Temperatur zu.

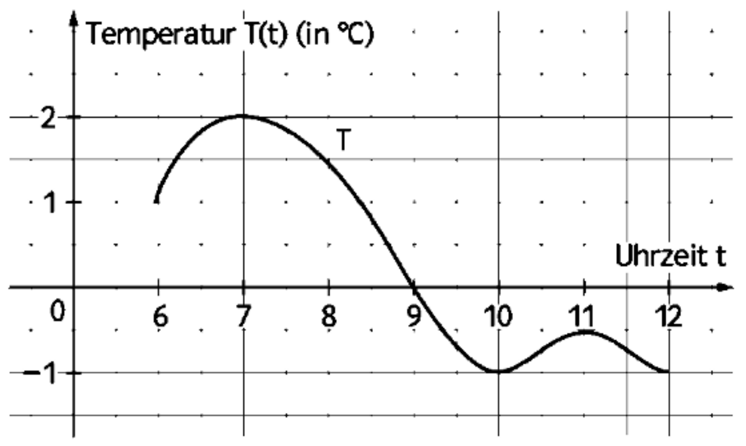
a) In welchen Zeitintervallen steigt bzw. fällt die Temperatur?

b) Zu welchen Uhrzeiten ist die Temperatur am höchsten bzw. am niedrigsten?

c) Wie viele Maximum- und Minimumstellen besitzt die Funktion ?

d) In welchen Zeitintervallen ist die Temperatur positiv, in welchen negativ?

e) Gib die Nullstelle der Funktion an und interpretiere sie.



a) Im Intervall [6;7], und auch
im Intervall [10;11] ***steigt*** *die Funktion.*
Im Intervall [7;10], und auch
im Intervall [11;12] ***fällt*** *die Funktion.*

b) Um 7 Uhr ist die Temperatur ***am höchsten.***
Um 10 Uhr und um 12 Uhr ist sie ***am niedrigsten.***

c) Maximumstelle ist .
Minimumstellen sind und .

d) Im Zeitintervall [6;9] ist die Temperatur positiv,
im Zeitintervall [9;12] ist die Temperatur negativ.

e) Die Nullstelle von ist .
Interpretation: Um 9 Uhr hat es 0°

Funktionen beschreiben und analysieren

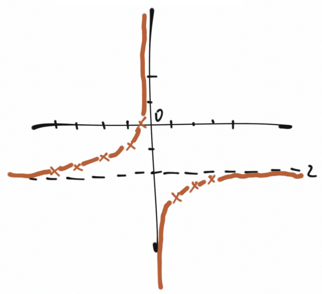
Um eine Funktion zu beschreiben, versucht man, alle bisher genannten Eigenschaften, meist mit Hilfe des Funktionsgraphen und des Funktionsterm in Zahlen und Intervalle zu fassen. An Beispielen ist diese Vorgangsweise am schnellsten erklärt.

B4. Gegeben ist die Termdarstellung der Funktion $f(x) = -2 - \frac{1}{x}$

a) Bestimme die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{R}$
b) Erstelle eine Wertetabelle und zeichne den Funktionsgraphen.
c) Berechne die Nullstellen des Graphen
d) In welchen Intervallen ist die Funktion monoton fallend bzw. monoton steigend?

$y = -2 - \frac{1}{x}$

b)



x	y
-4	$-1{,}75$
-3	$-1{,}67$
-2	$-1{,}5$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	0
$0 \notin \mathbb{D}$	
1	-3
2	$-2{,}5$
3	$-2{,}33$
...	...

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $0 = -2 - \frac{1}{x} \quad |+2$

$2 = -\frac{1}{x} \quad |\cdot x \quad (\Delta x \neq 0)$

$2x = -1 \quad |:2$

$x = -\frac{1}{2}$ $\quad N = \left(-\frac{1}{2} \middle| 0\right)$

d) MONOTON STEIGEND $x \in]-\infty;0[$ UND $x \in]0,\infty[$

B5. Gegeben ist der Funktionsterm der Funktion $f(x) = x^2 - x - 2$.

a) Bestimme die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{R}$

b) Erstelle eine Wertetabelle und zeichne den Funktionsgraphen.

c) Berechne die Nullstellen des Graphen

d) In welchen Intervallen ist die Funktion monoton fallend bzw. monoton steigend?

Funktionsterme aus Textangaben

Mathematik dient der Beschreibung von Sachverhalten. Also ist eine Grundaufgabe des Rechnens jene, Sachverhalte in eine mathematische Form zu bringen.

Diesen Vorgang nennt man in der Mathematik **modellieren** bzw. **Modell bilden**.

Meist hört sich diese Aufgabenstellung schwieriger an, als sie eigentlich ist.

B6. Eine Obstwaage zeigt im Kaufgeschäft den Einkaufspreis der Früchte in Abhängigkeit des Kilopreises an. Ein Kilogramm Bananen kosten 1.49 €.

a) Stelle den Funktionsterm auf

b) Bestimme die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{R}$

c) Berechne die Nullstellen des Graphen

d) Berechne den Preis von 3kg Bananen mit Hilfe des Funktionsterms und der mathematisch korrekten Schreibweise

e) In welchen Intervallen ist die Funktion monoton fallend bzw. monoton steigend?

a) $f(x) = 1.49 \cdot x$

b) *Ein negatives Gewicht ist für die Verwendung in dem Funktionsterm nicht sinnvoll, es ergeben sich daraus keine für den Einkauf relevanten Aussagen.*
$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$

c) $0 = 1.49 \cdot x \Leftrightarrow x = 0$
Die Nullstelle befindet sich im Ursprung bei $O = (0|0)$

d) $f(3) = 1.49 \cdot 3 = 4.47$

e) *Die Funktion ist über die gesamte Definitionsmenge streng monoton steigend.*

B7. Die Flughöhe einer Rakete nach dem Start lässt sich mit dem Funktionsterm $s(t) = 2.7t^2 + 2.65t$ beschreiben, wobei t die Zeit (in Sekunden) seit dem Start der Rakete ist und $s(t)$ die zugehörige Höhe (in Metern) zu diesem Zeitpunkt.

a) Bestimme die größtmögliche Definitionsmenge in $\mathbb{R}$

b) Zeichne den Funktionsgraphen.

c) Wann erreicht die Rakete eine Höhe von 1000 Meter?

d) Wie hoch ist die Rakete nach 10 Sekunden?