REELLE FUNKTIONEN

Was ist eine Funktion

Zwei Begriffe sind für die Definition des Begriffes "Funktion" von Bedeutung.

1. Eindeutige

2. Zuordnung

Diese beiden Begriffe sind in der unten stehenden Definition unterstrichen, um sie entsprechend hervorzuheben.

Definition

Sei A eine Menge von reellen Zahlen.

Wird jeder Zahl $x \in \mathbb{A}$ genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so bezeichnet man diese Zuordnung als reelle Funktion.

3 (zufällig ausgewählte) Beispiele für Funktionen

f(x) = 2x + 1 ... ist Vertreter des wichtigen Typs "Lineare Funktion"

 $f(x) = \sin(x)$... ordnet jedem x den Wert $\sin(x)$ zu. "Winkelfunktion"

 $f(x) = 9 \dots$ jedem x wird der Wert 9 zugewiesen. "Konstante Funktion"

Begriffe

Im Zusammenhang mit Funktionen werden immer wieder bestimmte Begriffe verwendet, die zu Beginn zusammengefasst werden sollen.

X

Der x-Wert einer Funktion hat unterschiedliche Bezeichnungen. Typisch sind "Stelle", "Unabhängige Variable" oder "Argument" der Funktion.

f(x)

Der so genannte "<u>Funktionswert</u>" oder "<u>Wert der Funktion</u>" wird meist mit einem " \underline{y} " als Variable verwendet. Da sie von x abhängt bezeichnet man sie auch als "<u>abhängige Variable</u>".

Definitionsmenge

Die gesamte Wertemenge, aus denen x-Werte verwendet werden und in die Funktion eingesetzt werden dürfen heißt "<u>Definitionsmenge</u>" und wird mit dem doppelt gezeichneten Buchstaben $\mathbb D$ abgekürzt.

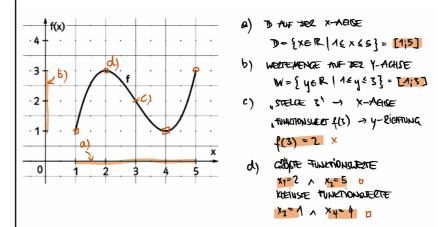
Wertemenge

Die Wertemenge besteht aus allen möglichen Funktionswerten, wenn die gesamte Definitionsmenge abgebildet wird.

Graph

Die Menge sämtlicher Wertepaare (natürlich meist in einem Koordinatensystem dargestellt) aus den Werten der gesamten Definitionsmenge und den zugeordneten Funktionswerten der Wertemenge heißt "Graph der Funktion". Auch der Graph ist also eine Menge und erhält den Buchstaben "G".

- **B1.** Die in der Abbildung dargestellte Funktion f ordnet jedem x den Funktionswert f(x) zu.
- a) Wie lautet die Definitionsmenge $\mathbb D$ der Funktion f?
- b) Wie lautet die Wertemenge \mathbb{W} der Funktion f?
- c) Wie groß ist der Funktionswert von f an der Stelle 3?
- d) An welchen Stellen nimmt die Funktion f den größten bzw. kleinsten Funktionswert an?



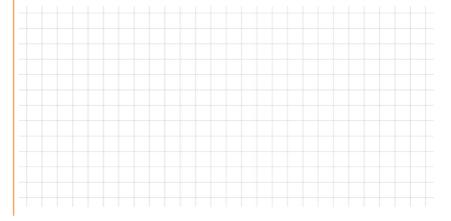
B2. Gegeben ist eine Funktion f(x). Drücke die folgenden Aussagen unter Verwendung der typischen Begriffe "Stelle" und "Funktionswert" aus.

- a) f(0) = 1
- b) f(1) < 3
- c) f(4) > f(3)
- d) $f(x) \ge 1$ für alle $x \in [0, 3]$
- a) Der Funktionswert an der Stelle O beträgt 1.
- b) Der Funktionswert an der Stelle I ist kleiner als 3
- c) Der Funktionswert an der Stelle 4 ist größer als der Funktionswert an der Stelle 3
- d) Für alle Stellen aus dem Intervall von O bis 3 ist der Funktionswert größer oder gleich I

B3. Die Höhe einer Kressepflanze (in Millimeter) wurde täglich gemessen. Schreibe mit Hilfe einer geeigneten Funktion f(x) in der Funktionsschreibweise an.

Die Definitionsmenge ist die Menge der natürlichen Zahlen, die Stellen geben die (durchnummerierten) Tage der Beobachtung an. Die Wertemenge sind die positiven reellen Zahlen, sie geben die Höhe der Kressepflanze an.

- a) Am 5. Tag war die Pflanze 50mm groß
- b) Am 6. Tag war die Pflanze noch keine $60 mm \ \text{groß}$
- c) Vom 7. auf den 8. Tag wuchs die Pflanze um 2mm
- d) Am 13. und am 14. Tag war die Pflanze nicht gleich groß
- e) Ab dem 9. Tag blieb die Pflanze 63mm groß



Funktionsgleichung

Eine Funktion kann als Zuordnung angeschrieben werden.

$$f(x): x \rightarrow 2x - x^2$$

Viel öfter begegnet man aber der Schreibweise als Gleichung.

$$f(x) = 2x - x^2$$

Diese besteht aus der **Funktionsbezeichnung** (links) und dem **Funktionsterm** (rechts)

Da man den Funktionswert f(x) im Koordinatensystem in der y-Richtung abbildet, schreibt man auch oft statt f(x) den Buchstaben y.

$$f(x): y = 2x - x^2$$

Alle drei Schreibweisen sind völlig äquivalent zu betrachten.

Funktionen in Form von Gleichungen können in zwei unterschiedlichen Arten dargestellt werden.

Explizite Darstellung Die Funktionsgleichung hat genau die erwartete Form y = f(x). Setzt man also auf der rechten Gleichungsseite eine beliebige Stelle x ein, so erhält man als Ergebnis den Funktionswert f(x) bzw. eben y.

Beispiel:
$$y = 2x^2 + 2x - 1$$

Implizite Darstellung Ebenso kann eine Funktion aber in einer Form gegeben sein, in der das y nicht auf der linken Gleichungsseite bereits isoliert ist. Eine solche Form kann man oft in eine explizite Darstellung umformen.

Beispiel:
$$x \cdot y + y = 1$$

Definitionsmenge ermitteln

Zur Definition einer Funktion gehört nicht nur der **Funktionsterm** (bzw. die Gleichung), sondern auch die **Definitionsmenge**. In vielen Fällen kann man für einen bestimmten Term eine sinnvolle Definitionsmenge ermitteln.

Das bedeutet

- im Kontext, dass keine sinnlosen Werte eingesetzt werden (negatives Lebensalter, nicht ganzzahlige Personenanzahl, usw.)
- mathematisch vor allem, dass man im Term darauf achtet, dass keine Division durch Null und auch keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden kann.

Damit das nicht passiert, müssen x-Werte aus so einer (sinnvollen und mathematisch korrekten) Definitionsmenge ausgeschlossen werden.

Die Definitionsmenge ist dann eine **echte Teilmenge** der **Reellen Zahlen** \mathbb{R} .

B4. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y + y = 1$

- a) Legt die Gleichung eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fest?
- b) Gib eine möglichst große Teilmenge von $\mathbb R$ als Definitionsmenge an, sodass eine Funktion festgelegt wird.

a)
$$x \cdot y + y = \Lambda$$
 $y \cdot (x + \Lambda) = \Lambda \quad | \cdot | (x + \Lambda)$
 $y = \frac{\Lambda}{x + \Lambda}$

MELDEN ...

TOR $x = -\Lambda$ Circt's ALLO KeinEN FUNKTIONSWEET

 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \rightarrow y$ ist beine Funktion

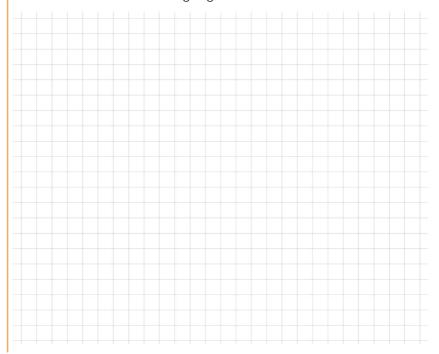
 $horizonall f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid x \rightarrow y$ ist one Funktion

 $f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid x \rightarrow y$ ist one Funktion

 $f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid x \rightarrow y$ ist one Funktion

B5. Gegeben ist die Gleichung $x \cdot y + \frac{1}{y} = 0$

- a) Legt die Gleichung eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fest?
- b) Gib eine möglichst große Teilmenge von $\mathbb R$ als Definitionsmenge an, sodass eine Funktion festgelegt wird.



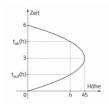
Falls bei einer Gleichung (der Einfachheit halber) keine Definitionsmenge angegeben ist, wähle die größtmögliche Teilmenge von \mathbb{R} .

Eindeutige Zuordnung

Die Eindeutigkeit der Zuordnung ist nicht naturgegeben, sondern von Mathematikern so definiert. So wie man zu einspurigen Fahrzeugen Motorrad und zu mehrspurigen Fahrzeugen Auto sagt, so bezeichnet man eben nur **eindeutige** Zuordnungen als **Funktionen**.



Jeder Stelle t (aus der Definitionsmenge \mathbb{D}) ist **genau ein** Funktionswert h(t) zugeordnet.



Es gibt Stellen h, denen mehr als ein Wert zugeordnet ist. Solche mathematischen Zusammenhänge werden nicht als Funktion bezeichnet.