INTEGRAL VON ÄNDERUNGSRATEN

Änderungsrate - was war das nochmal?

Du erinnerst dich noch an die Besprechung von Differenzenquotient und Differentialquotient. Genau dahin müssen deine Gedanken jetzt.

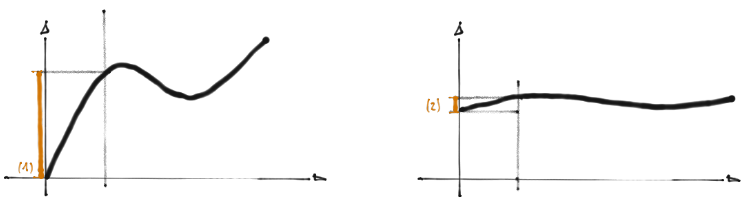
Die Gemeinsamkeit aller Aufgaben zum Thema Änderungsraten ist, dass Funktionen behandelt werden, deren unabhängige Variable nicht allgemein x, sondern ganz konkret eine **Zeiteinheit** ist, die mit der **Variable t** symbolisiert wird.

Gegeben ist also eine Funktion $f\colon t \rightarrow f(t) : t \in \mathbb{R}_0^+$

Die abhängige Variable kann unterschiedlichste Werte annehmen. Jede Zustandsbeschreibung, die sich mit fortschreitender Zeit ändern kann, fällt damit in diese Aufgabenbeschreibung. Hier einige Beispiele:

- Weg- und Geschwindigkeit
- Zu- und Abfluss von Flüssigkeiten
- Medikamentenkonzentration
- Fördermengen
- Geburtenzahlen
- Größe, Wachstum von Pflanzen, Tieren

Alle diese Größen kann man über eine bestimmte Zeit beobachten. Und so sie nicht über die Zeit konstant bleiben, ist natürlich eine Veränderung messbar.



Während im ersten Zeitbereich links eine großer Veränderung ablesbar ist, ist im rechten Graph die Veränderung eher gering.

Du siehst, dass das Ausmaß der Veränderung etwas mit der Steigung der Kurve im Funktionsgraphen zu tun hat.

PASS AUF

Beobachtet man die Veränderung einer Zustandsgröße pro Zeiteinheit, so bezeichnet man diese neu Größe als Änderungsrate.

So ergeben sich unterschiedliche Bezeichnungen für die Veränderungsraten.

	Veränderung pro Zeit
Strecke	Geschwindigkeit
Geschwindigkeit	Beschleunigung
Zufluss, Abfluss	Zufluss-, Abflussrate
Größe	Wachstum
Wachstum	Wachstumsrate

Änderungsrate - Differenzenquotient - Ableitung

Was die Änderungsrate beschreibt, kannst du schon lange berechnen.

Differenzenquotient. Um wieviel ändert sich die Zustandsgröße f(x) in einer bestimmten Zeiteinheit.

$$D(x_1, x_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Graphisch macht diese Veränderung als Sekante in einem Funktionsgraphen sichtbar. Die Steigung dieser Sekante beschreibt, wie groß die Veränderung ist.

Ableitung. Um momentane Änderungsrate, also das **Maß der Änderung einer Zustandsgröße in einem bestimmten Moment** zu berechnen, ist höhere Mathematik notwendig.
Du musst die Differenzialrechnung beherrschen, denn der definitionsgemäßen Grenzwert lässt sich nur sehr umständlich berechnen.

$$f'(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Inzwischen hast du aber gelernt, Ableitungen $f'(x)$ von bestimmten Funktionen (Polynomfunktionen, Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen). So kannst du abschätzen, wie schnell sich eine Größe wie der Zufluss, die Konzentration oder

Auch Veränderungsraten können sich ändern.

Beispiele

Die Geschwindigkeit ist eine Veränderungsrate (der Zeit/Ort-Funktion). Natürlich kann sich auch diese über die Zeit ändern, so gelangt man ja zur Beschleunigung.

Auch das Wachstum ist eine Veränderungsrate (der Zeit/Größen-Funktion). Eine Veränderung des Wachstums in der Zeiteinheit ist die Wachstumsrate.

Mit dem Integral zum Funktionswert

Gelangt man mit Hilfe der Ableitung von der Zustandsgröße zu ihrer Änderungsrate, so schlägst du die entgegengesetzte Richtung wiederum mit dem Integral ein.

Durch Integrieren gelangst du also von der Geschwindigkeitsfunktion zur Zeit/Ort-Funktion, von der Zuflussrate zum Zufluss, vom Wachstum zur Größenfunktion usw.

Graphische Darstellung von Änderungsraten

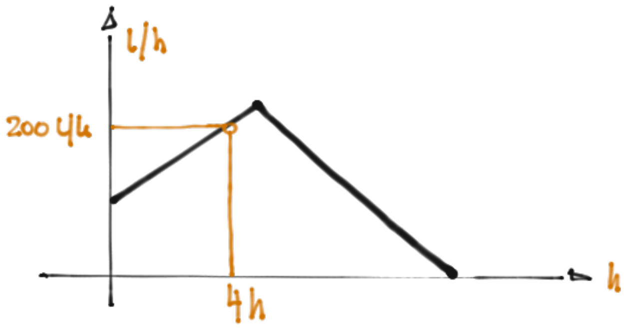
Graphen von Änderungsraten sind gewöhnungsbedürftig.

Während auf der x-Achse normal die Zeitachse abgebildet ist, werden auf der y-Achse eben Raten abgetragen. m/s, l/h, kg/a, …

PASS AUF

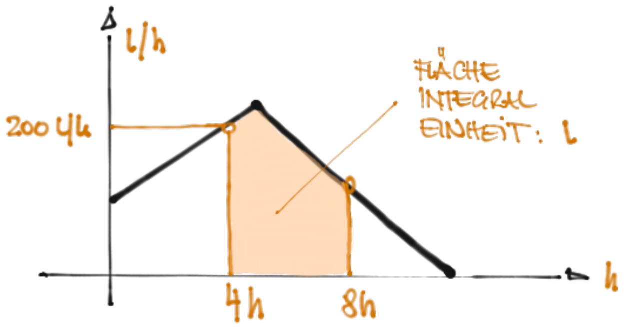
Achte auf die Beschriftung der y-Achse.

Nicht „Liter“ sind hier aufgetragen, sondern „Liter pro Stunde“



Aus dieser Grafik kann man ablesen, dass nach vier Stunden der Zufluss 200 Liter pro Stunde betrug.

Möchte man ermitteln, wie viel Liter in einer bestimmten Zeit zufließen, muss man die Zuflussrate mit der vergangenen Zeit multiplizieren. Da sich diese Zuflussrate aber mit verlaufender Zeit verändert, bleibt wieder nur das Integral. Immerhin.



1. Staubecken

Die Zuflussrate (m^3/h) zu einem Staubecken nimmt linear ab nach der Formel

$$f(t) = 2000 - 16 \cdot t$$

(t in h)

Berechne die Zuflussmenge (m^3) in den ersten 40 Stunden.

$$f(t) = 2000 - 16 \cdot t$$

$$\int_0^{40} f(t)\,dt = \int_0^{40} (2000 - 16 \cdot t)\,dt$$

$$= 2000t - 8t^2 \Big|_0^{40}$$

$$= (80.000 - 8 \cdot 1600) - 0$$

$$= 67.200 \text{ m}^3$$

2. Insektenpopulation

Das Wachstum einer Insektenpopulation (= Populationsrate) (t in Jahren, $f(t)$ in Millionen Insekten pro Jahr) innerhalb eines Jahres lässt sich mit der Funktion $f(t)$ beschreiben

$$f(t) = t^4 - 2 \cdot t^2 + 0.5$$

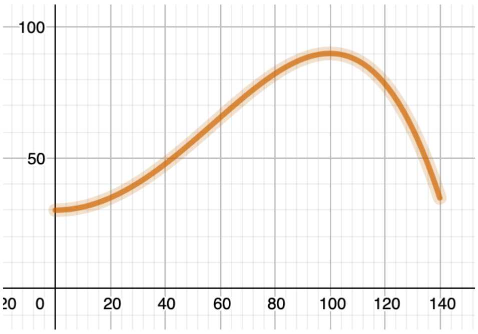
a) Wie lang nimmt die Population zu?

b) Berechne die Zunahme der Population innerhalb der ersten 3 Monate.

c) Berechne, ob die Population innerhalb dieses Jahres ab- oder zugenommen hat.

3. Bergwerk

Ein Bergwerk wurde 1880 eröffnet. Die Förderrate $f(t)$ in $1000\ \mathrm{t/Jahr}$ des Bergwerks ist in der Grafik gegeben?



Lies folgende Informationen aus der Grafik ab:

a) Wie viel konnte bei Eröffnung des Bergwerks pro Jahr gefördert werden?

b) In welchem Jahr war die Förderrate am höchsten?

c) Wie viel 1000 Tonnen Erz wurden in den ersten 40 Jahren etwa gefördert?

d) Wie viel 1000 Tonnen Erz wurden zwischen 1980 und 2000 gefördert?

e) Was drückt folgendes Integral aus: $M = \int_0^{140} f(t) \cdot dt$