INTEGRAL UND WIRTSCHAFT

KONZENTRIERE DICH

Kosten
Grenzkosten
Stückkosten

Auffrischen

Einige zentrale Begriffe in der Kosten- und Wirtschaftsmathematik können nicht oft genug zusammengefasst werden. Los gehts

Kostenfunktion $K(x)$ Eine Kostenfunktion beschreibt die entstehenden Gesamtkosten einer Produktion von Gütern. Du setzt als x-Wert die Anzahl der hergestellten Güter ein und erhältst die Kosten, die dabei anfallen.

Fixkosten und **Variable Kosten** Die Kostenfunktion besteht aus stückzahlunabhängigen Kosten, die auch anfallen, wenn kein einziges Produkt hergestellt wird, und von der Stückzahl abhängigen Kosten, die sich verändern, wenn sich die Stückzahl verändert

Stückkostenfunktion $\overline{K}(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ Um zu berechnen, wie viel Kosten bei der Produktion von x Stück nicht im Gesamten (Kostenfunktion) sondern pro Stück anfallen, verwendet man die ganz logisch berechnete Stückkostenfunktion.

Grenzkostenfunktion $K'(x)$ Die Ableitung der Kostenfunktion trägt diesen besonderen Namen, ist und bleibt aber von der Bedeutung her einfach die Ableitung der Kostenfunktion, also eine Art „momentaner Änderungsrate der Kosten“, ein Maß dafür, wie schnell sich die Gesamtkosten bei Erhöhung der produzierten Stückzahl ändern.

Unnötig zu erwähnen, dass die Stammfunktion der Grenzkostenfunktion die Kostenfunktion ist. Gut? Danke.

Betriebsoptimum Optimal ist, wenn pro erzeugtem Stück möglichst wenig Kosten anfallen. Das ist am Minimum der Stückkostenfunktion der Fall. Eine schwer zu merkende aber leicht beweisbare Tatsache ist, dass Stückkosten und Grenzkosten am Betriebsoptimum gleich groß sind.

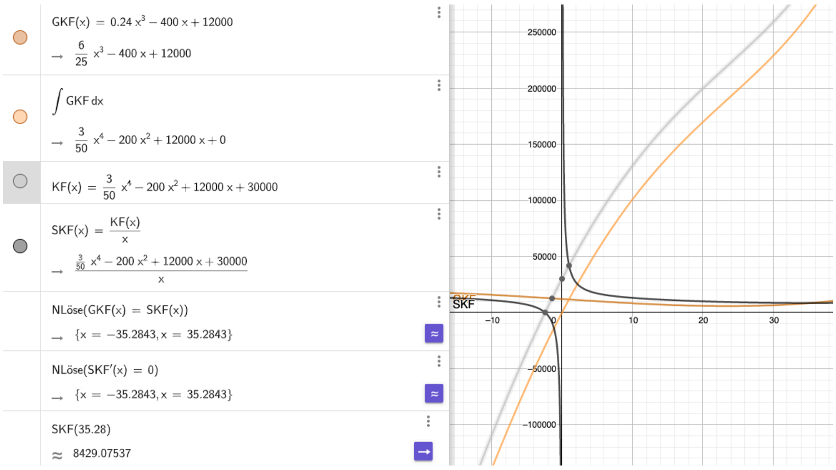
Es gilt also: $\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$

Erlösfunktion $E(x)$ und **Gewinnfunktion** $G(x)$ Vergleichbar mit der Kostenfunktion gibt es eine analoge Funktion für die entstehenden Einnahmen bei einer bestimmten produzierten (und verkauften) Stückzahl. Klarerweise ist die Differenz zwischen Einnahmen und Ausgaben, also zwischen Erlösfunktion und Kostenfunktion die Gewinnfunktion.

Es gilt also: $G(x) = E(x) - K(x)$

B1. Gegeben ist eine Grenzkostenfunktion
$K'(x) = 0.24x^3 - 400x + 12000$

a) Berechne die Kostenfunktion, wenn die Fixkosten 30.000 € betragen.
b) Berechne die Stückkostenfunktion
c) Berechne das Betriebsoptimum
d) Wie groß sind die Stückkosten am Betriebsoptimum?



B2. Gegeben ist eine Grenzkostenfunktion $K'(x) = 0.96$.

a) Berechne die Kostenfunktion, wenn die Fixkosten 11.2 € betragen.
b) Berechne die Stückkostenfunktion
c) Berechne das Betriebsoptimum
d) Wie groß sind die Stückkosten am Betriebsoptimum?

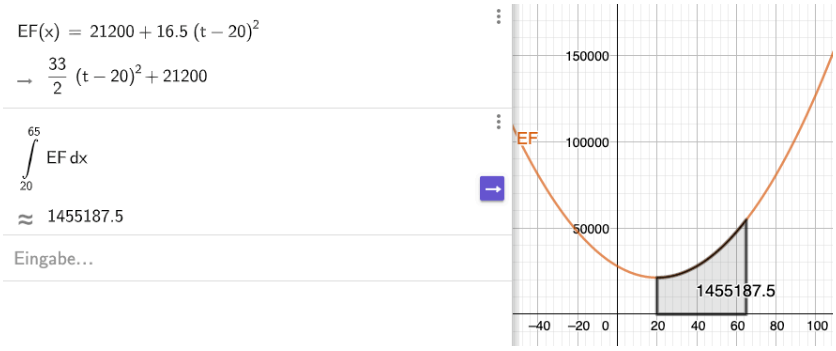
Andere Anwendungen aus der Wirtschaft

Einkommen und Lebensverdienstsumme

Lässt sich das Einkommen als Funktion in Abhängigkeit des Lebensalters angeben, so tritt auch hier ein Klassiker in der Verwendung des Integrals zu Tage.

Im Gegensatz zu vorhin gibt es hier aber gar nicht viel zu erklären.

B3. Gegeben ist eine Einkommensfunktion
$E(x) = 21200 + 16.5 \cdot (t - 20)^2$ für die (sinnvolle) Definitionsmenge
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 20 < x < 65\}$
Berechne die Lebensverdienstsumme.



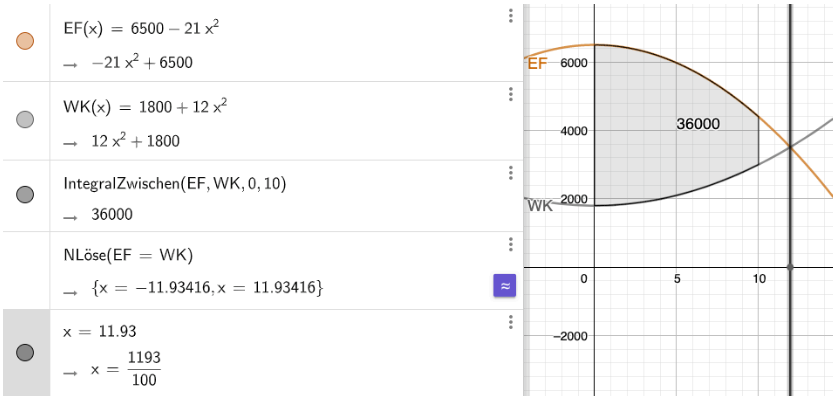
Rentabilität

Das Prinzip der Rentabilität erklärt schnell der Hausverstand. Eine zur Produktion nötige Maschine ist dann rentabel, wenn die Ertrag der Maschine größer ist als ihre Wartungskosten. Man benötigt von der Lebensdauer der Maschine abhängige Funktionen, um die Rentabilität als Differenz berechnen zu können.

B4. Eine Produktionsmaschine liefert nach der Funktion $EF(t) = 6500 - 21t^2$ in Abhängigkeit ihrer Lebensdauer ihren Beitrag zum Gesamtertrag. Die Wartungs- und Betriebskosten nehmen nach der Funktion $WK(t) = 1800 + 12t^2$.

a) Wie hoch ist der Ertrag abzüglich der Wartungs- und Betriebskosten in den ersten zehn Jahren?

b) Wie lange ist die Produktionsmaschine rentabel?



Zahlungsstrom

Als Zahlungsstrom wird eine Größe bezeichnet, die eine bestimmte Geldmenge pro Zeiteinheit angibt, in gewissem Sinne also eine Änderungsrate. Zahlungsströme benötigt man z.B. im Bankwesen, aber auch in der Beschreibung der Wirtschaftlichkeit eines Supermarktes wie im nächsten Beispiel.

Über die gesamte Öffnungszeit kann mit Hilfe einer Funktion der Erlös abgebildet werden. Integrale über bestimmte Zeitbereich ergeben die entsprechenden Gesamterlöse.

B5. Der Zahlungsstrom eines Supermarktes wird mit der Funktion
$ZS(t) = 1.8t^4 - 1.2t^3 - 903t + 4500.$
von 09:00 - 19:00 Uhr abgebildet (t ist die Anzahl der Stunden Öffnungszeit)

a) Ist der Zahlungsstrom um 09:00 Uhr oder um 15:00 Uhr größer?
b) Wie groß sind die Gesamteinnahmen des Tages?
c) Um welche Uhrzeit ist die Hälfte des Tagesertrags erreicht?