BESONDERE UNGLEICHUNGEN

PASS AUF

Die Betragsfunktion multipliziert einen Wert x mit (-1), wenn dieser negativ ist

Ungleichungen mit Beträgen

Die Betragsfunktion ist gleichermaßen wichtig wie unbeliebt in der Mathematik. Man lernt sie in der AHS kennen, aber nie richtig nutzen. Deshalb ist man auch nicht besonders vertraut im Umgang mit ihr.

Hier eine Zusammenfassung

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ (-1) \cdot x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Hier steht also kompliziert, was aus dem Wert x gemacht wird. Ist der Wert positiv, so wird gar nichts gemacht, ist der Wert negativ, so wird das Vorzeichen gewechselt, sodass auch diese Werte nach der Anwendung der Betragsfunktion positiv ist.

Die Funktionswerte der Betragsfunktion sind also **immer positiv**.

Die Umkehrung des Vorzeichens (falls x negativ ist) erfolgt mathematisch am einfachsten durch Multiplikation mit (-1).

$$f(7) = |7| = 7 \text{ , weil } 7 \geq 0$$

aber

$$f(-4) = |-4| = (-1) \cdot (-4) = 4 \text{ , weil } -4 < 0$$

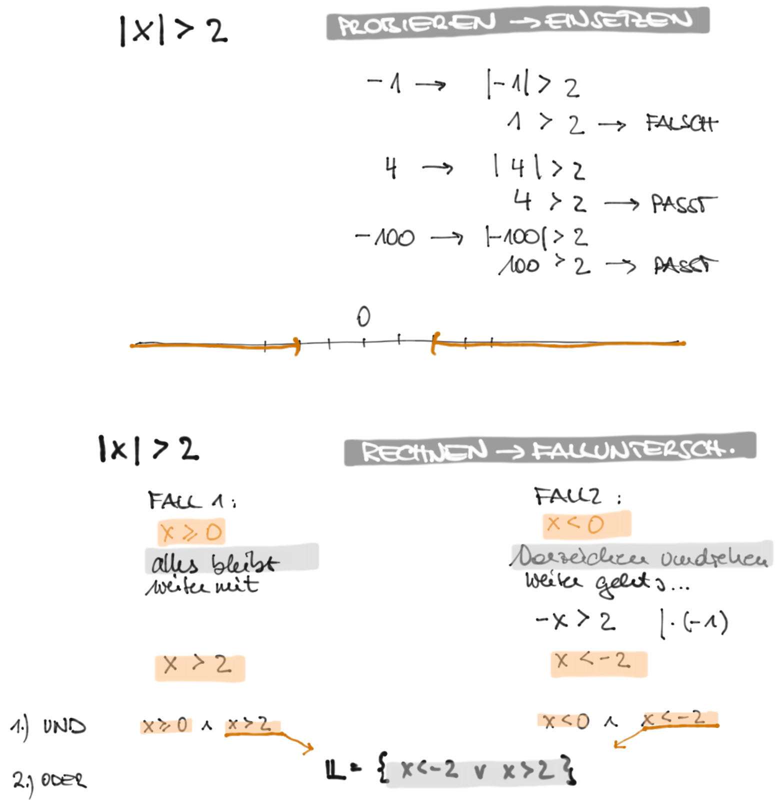
So wird eine sehr verständliche Funktion in kürzester Zeit doch recht mathematisch.

Die größte Verwirrung entsteht beim „Umkehren des Vorzeichens“

- Wenn die Zahl x negativ ist, muss sie positiv werden
- Wenn x (die negative Zahl) positiv werden soll, muss sie mit (-1) multipliziert werden
- Aus x wird also $-x$. Das sieht aber jetzt negativer aus als zuvor. Ist es aber nicht.
- Schau: Wenn z.B. $x = -3$ ist, dann wäre $-x = 3$. Und das passt genau. Es soll ja positiv werden, und dazu muss ein Minus vor die Variable.

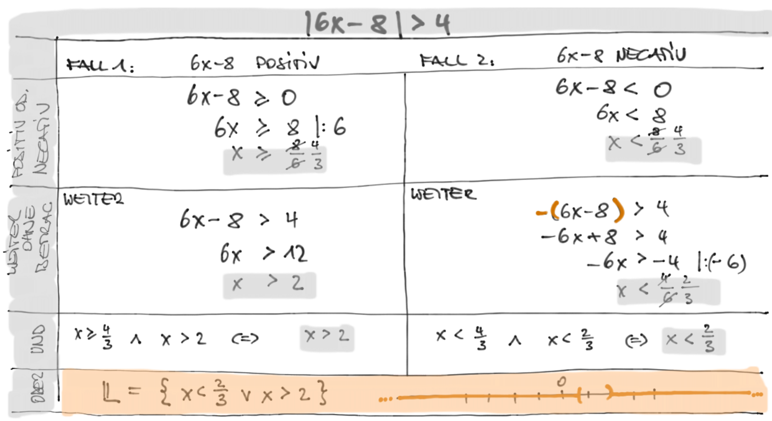
Beginn: Ganz einfach

B1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $|x| > 2$ eine wahre Aussage?
Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.



Das wars aber auch schon, die Beispiele werden umständlicher, nicht aber komplizierter oder unverständlicher.

B2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $|6x - 8| > 4$ eine wahre Aussage?
Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.



B3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $\left|6x - 8\right| > 4$ eine wahre Aussage? Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.

Quadratische Ungleichungen

Bei quadratischen Ungleichungen gibt es zwei völlig unterschiedliche Wege zum Ziel, hör dir beide an, und entscheide, welche dir klarer erscheint.

Wir behandeln die Ungleichung $x^2 - 2x > 3$.

Für beide Möglichkeiten beginnt die Lösung des Beispiels identisch.

- Die Ungleichung lautet
  $x^2 - 2x > 3$
- Ungleichung umformen, dass rechts eine Null steht.
  $x^2 - 2x - 3 > 0$
- Ungleichung wie eine Gleichung betrachten und Nullstellen finden.
  $x^2 - 2x - 3 = 0$ mit Lösungsformel: $x_1 = -1,\ x_2 = 3$

PASS AUF

Du hast zwei Chancen. Rechne oder skizziere!

Möglichkeit 1: Ungleichungen betrachten.

1) Die linke Ungleichungsseite als Produkt schreiben:
$(x+1)\cdot(x-3) > 0$

2) Dieses Produkt ist in zwei Fällen positiv.
Beide Faktoren positiv: $x+1>0 \wedge x-3>0$
Oder beide Faktoren negativ: $x+1<0 \wedge x-3<0$

3) Vereinfachen und verknüpfen mit UND und ODER läuft ab wie immer.

B4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $x^2 - 2x > 3$ eine wahre Aussage? Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.

$x^2 - 2x > 3 \quad | -3$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$

$(x+1)\cdot(x-3) > 0$

Fall 1

$x+1>0 \wedge x-3>0$

$x>-1 \wedge x>3$

$x > 3$

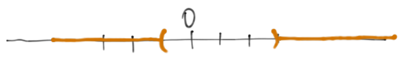
$\vee$

Fall 2

$x+1<0 \wedge x-3<0$

$x<-1 \wedge x<3$

$x < -1$



$\mathbb{L} = \{ x<-1 \vee x>3 \}$

Möglichkeit 2: Graph skizzieren.

1) Den Graphen der Funktion (linke Ungleichungsseite) skizzieren oder einfach nur vorstellen.
$x^2 - 2x - 3 = 0 \ldots$ Der Koeffizient ist positiv, die Funktion nach oben offen.

2) Das bedeutet, dass die Funktionswerte **außerhalb** der Nullstellen größer als Null sein müssen

3) Die Lösung lautet also $x < -1 \vee x > 3$

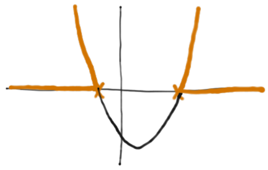
B4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $x^2 - 2x > 3$ eine wahre Aussage? Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.

$x^2 - 2x > 3 \quad | -3$

$x^2 - 2x - 3 > 0$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$



$x < -1 \quad \vee \quad x > 3$

Ganz ähnlich gehen diese beiden Aufgaben, wenn die quadratische Ungleichung ein Kleinerzeichen beinhaltet. Dieses Beispiel wirst aber du lösen.

B5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $x^2 + 13x < -30$ eine wahre Aussage? Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.

B5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ergibt $x^2 + 13x < -30$ eine wahre Aussage? Zeichne die Lösung auf einem Zahlenstrahl ein.