UNGLEICHUNGEN I

Was ist

Eine Ungleichung besteht aus einem Term auf der **linken Seite** und einem Term auf der **rechten Seite**. Zwischen den beiden Termen steht eines der vier Ungleichheitszeichen $<, \leq, \geq, >$

$$2x+3 < -16$$

Ungleichungen lösen

Wie bei den Gleichungen bedeutet "Lösen von Ungleichungen", diejenigen Werte zu ermitteln, die man für "**x**" einsetzen kann, um eine **wahre Aussage zu erhalten.**

SETZE $x=1$

$$2x+3 < -16$$
$$\underbrace{2\cdot 1+3}_{5} < -16$$
$$5 < -16$$

FALSCH → $x=1$ ist KEINE LÖSUNG

SETZE $x=-10$

$$2x+3 < -16$$
$$\underbrace{2\cdot(-10)+3}_{-17} < -16$$
$$-17 < -16$$

WAHR → $x=-10$ IST LÖSUNG

Wie sieht man aber, ob bestimmte Werte passen oder nicht?

Äquivalenzumformungen

Dazu gibt es schon eine Methode bei den Gleichungen. Jede Gleichung kannst du so umformen, dass sie zwar anders aussieht wie vorher, aber **die selben Lösungen** besitzt.

Das ist genial! Schaffst du es, eine Gleichung so umzuformen, dass sie z.B. mit "**x=**" beginnt, ist es leicht, zu erkennen, welche Lösungen du einsetzen kannst, damit eine wahre Aussage herauskommt.

Dieselbe Methode wendest du auch bei Ungleichungen an. Du veränderst die Ungleichungen, ohne dabei ihre Lösungsmenge zu verändern.

Ungleichungen umformen

Wie bei den Gleichungen gilt auch hier

PASS AUF

<u>Addierst</u> oder <u>subtrahiert</u> du auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Größe, so verändert sich die Lösungsmenge dabei nicht.

$$2x + 3 < -16 \quad | -3$$
$$2x + 3 - 3 < -16 - 3$$
$$2x < -19$$

<u>Multiplizierst</u> du oder <u>dividierst</u> du aber auf beiden Seiten der Ungleichung mit derselben Größe, **musst du aber immer aufpassen.**

Das ist aber auch klar. Es hängt damit zusammen, dass ganz vereinfacht gilt:

RICHTIG

$$-2 < 2 \quad | \cdot (-1)$$
$$2 < -2$$

FALSCH

Wenn also multipliziert oder dividiert wird, musst du auch das Ungleichheitszeichen mit umdrehen, damit die neue Gleichung auch tatsächlich äquivalent ist.

PASS AUF

<u>Multiplizierst</u> oder <u>dividierst</u> du auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Größe, so muss das **Ungleichheitszeichen** umgedreht werden, damit sich die Lösungsmenge dabei nicht verändert.

Das ist gut zu verstehen, macht die Sache aber in Zukunft ein bisschen kompliziert.

B1. Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung

$$-(3x + 1 - 13) \leq 6$$

$$
\begin{aligned}
-(3x+\underbrace{1-13}) &\leq 6 \quad &| \cdot (-1) \\
3x - 12 &\geq -6 \quad &| +12 \\
3x &\geq 6 \quad &| :3 \\
x &\geq 2
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

GeoGebra CAS

Löse$(-(3\,x + 1 - 13) \leq 6)$

$\rightarrow \{x \geq 2\}$

Hier dein Beispiel

2. Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung

$$\frac{1 - 3x}{4} > -2$$

Ungleichungskette

Aus verschiedensten Beispielen sind auch verkettete Ungleichungen bekannt.

$$-2 < 2x + 9 \leq 1$$

Es spricht nichts dagegen, alles was du über die Äquivalenzumformungen weißt, auch auf den drei Teilen der Ungleichungskette anzuwenden, um zu versuchen, in der Mitte ein einzelnes x landen zu lassen. Kann sein, dass das manchmal zum Ziel führt.

$$-3 < 2x + 9 \leq 1 \quad | -9$$

$$-3 - 9 < 2x + 9 - 9 \leq 1 - 9$$

$$-12 < 2x \leq -8 \quad | :2$$

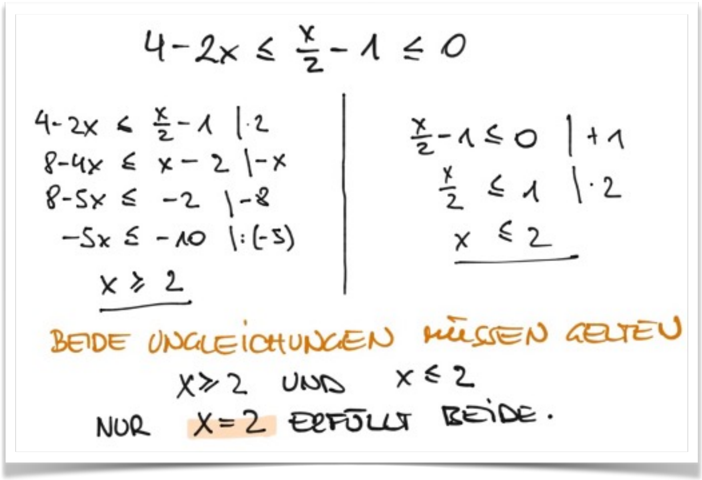
$$-6 < x \leq -4$$

Liegt also das x im Intervall $\left[-6; -4\right]$, dann ergibt es, eingesetzt in die Ungleichungskette eine **wahre Aussage**. Wieder gibt es unendlich viele Lösungen.

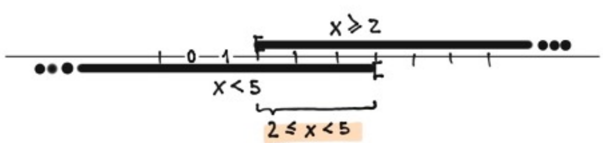
3. Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungskette

$$0 \leq \frac{x-1}{5} \leq 1$$

Das ist in der Regel nicht so einfach. In dem Fall muss du auf zwei Ungleichungen aufspalten. Nicht schwierig, nur doppelter Aufwand.

> **4. Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungskette**
>
> $$4 - 2x \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 0$$
>
> 
>
>
> GeoGebra CAS
>
> Löse$\left(4 - 2\,x \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 0\right)$
>
> $\to \{x = 2\}$

Die Lösungsmenge ist also die Menge aller x, die **beide Ungleichungen erfüllt**. Auch das kann haarig werde, hier hilft es, sich die Ungleichungen auf einem Zahlenstrahl darzustellen.

> **5. Welche Werte für x erfüllen die folgenden beiden Ungleichungen?**
>
> $$x \geq 2 \text{ und } x < 5$$
>
> 
>

Zum Abschluss noch ein Beispiel für dich

6. Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungskette

$$2 \cdot (x - 1) \leq 9 - x \leq 15 + 3x$$